

**FINAL JEE-MAIN EXAMINATION - JANUARY, 2020**  
**Held On Wednesday, 8 January 2020**  
**TIME : 9 : 30 AM to 12 : 30 PM**

1. Let  $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^3 x (1 + \sin^6 x)^{\frac{2}{3}}} = f(x) (1 + \sin^6 x)^{\frac{1}{\lambda}} + c$  then find value of  $\lambda f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

माना  $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^3 x (1 + \sin^6 x)^{\frac{2}{3}}} = f(x) (1 + \sin^6 x)^{\frac{1}{\lambda}} + c$ , तो  $\lambda f\left(\frac{\pi}{3}\right)$  का मान है—

- (1) 4                                      (2) -2                                      (3) 8                                      (4) -4

**Ans.** (2)

**Sol.**

$\sin x = t$

$\cos x \, dx = dt$

$$I = \int \frac{dt}{t^3(1+t^6)^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{dt}{t^7\left(1+\frac{1}{t^6}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Put  $1 + \frac{1}{t^6} = r^3$  रखने पर  $\Rightarrow \frac{dt}{t^7} = \frac{-1}{2} r^2 dr$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{r^2 \, dr}{r^2} = -\frac{1}{2} r + c = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin^6 x + 1}{\sin^6 x}\right)^{\frac{1}{3}} + c = -\frac{1}{2 \sin^2 x} (1 + \sin^6 x)^{\frac{1}{3}} + c$$

$f(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 x$  and और  $\lambda = 3$

$\lambda f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2$

2. If  $y(x)$  is a solution of differential equation  $\sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \sqrt{1-y^2} = 0$ , such that  $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , then

यदि  $y(x)$ , अवकल समीकरण  $\sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \sqrt{1-y^2} = 0$  का हल है तथा  $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , तब

- (1)  $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$                       (2)  $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$                       (3)  $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$                       (4)  $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

**Ans.** (3)

**Sol.**  $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow \sin^{-1}y + \sin^{-1}x = c$

At  $x = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^{-1}y = \cos^{-1}x$

Hence अतः  $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^2 + 2}{7x^2 + 2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$  is equal to

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^2 + 2}{7x^2 + 2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$  का मान है-

- (1)  $e^{-2}$                       (2)  $e^2$                       (3)  $e^{2/7}$                       (4)  $e^{3/7}$

Ans. (1)

Sol. Let  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^2 + 2}{7x^2 + 2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left\{ \frac{3x^2 + 2}{7x^2 + 2} - 1 \right\}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left\{ \frac{-4x^2}{7x^2 + 2} \right\}} = e^{\frac{-4}{2}} = e^{-2}$

4. In a bag there are 5 red balls, 3 white balls and 4 black balls. Four balls are drawn from the bag. Find the number of ways of in which at most 3 red balls are selected

- (1) 450                      (2) 360                      (3) 490                      (4) 510

Ans. (3)

Sol. 

0 Red,	1 Red,	2 Red,	3 Red
Number of ways = ${}^7C_4 + {}^5C_1 \cdot {}^7C_3 + {}^5C_2 \cdot {}^7C_2 + {}^5C_3 \cdot {}^7C_1 = 35 + 175 + 210 + 70 = 490$			

5. Let  $f(x) = \{(\sin(\tan^{-1}x) + \sin(\cot^{-1}x))^2 - 1\}$  where  $|x| > 1$  and  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(\sin^{-1}f(x))$ .

If  $y(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$  then  $y(-\sqrt{3}) =$

- (1)  $\frac{5\pi}{6}$                       (2)  $\frac{-\pi}{6}$                       (3)  $\frac{\pi}{3}$                       (4)  $\frac{2\pi}{3}$

Ans. (2)

Sol.  $2y = \sin^{-1}f(x) + C = \sin^{-1}(\sin(2\tan^{-1}x)) + C \Rightarrow 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + C$

$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + C \therefore C = 0$

for  $x = -\sqrt{3}, 2y = \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right) + 0 \Rightarrow 2y = \frac{-\pi}{3}$

$\left(y = \frac{-\pi}{6}\right)$

6. If  $2^{1-x} + 2^{1+x}, f(x), 3^x + 3^{-x}$  are in A.P. then minimum value of  $f(x)$  is

- (1) 1                      (2) 2                      (3) 3                      (4) 4

Ans. (3)

Sol.  $f(x) = \left( \frac{2^{1-x} + 2^{1+x} + 3^x + 3^{-x}}{2} \right)$

Using  $AM \geq GM$

$f(x) \geq 3$

7. Which of the following is tautology

निम्न में से कौनसी पुनःरुक्ति है ?

(1)  $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

(2)  $q \rightarrow p \wedge (p \rightarrow q)$

(3)  $p \vee (p \wedge q)$

(4)  $(p \wedge (p \vee q))$

Ans. (1)

Sol.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	$q \rightarrow p \wedge (p \rightarrow q)$	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	T	F	F	F	F

8. A is a  $3 \times 3$  matrix whose elements are from the set  $\{-1, 0, 1\}$ . Find the number of matrices A such that  $tr(AA^T) = 3$ . Where  $tr(A)$  is sum of diagonal elements of matrix A.

A एक  $3 \times 3$  क्रम का आव्यूह है, जिसके अवयव समुच्चय  $\{-1, 0, 1\}$  से लिए गये हैं। तब आव्यूह A की संख्या ज्ञात करो जो इस प्रकार है कि  $tr(AA^T) = 3$  जहाँ  $tr(A)$  आव्यूह A के विकर्ण के अवयवों का योग है।

(1) 572

(2) 612

(3) 672

(4) 682

Ans. (3)

Sol. Let माना  $A = [a_{ii}]_{3 \times 3}$

$tr(AA^T) = 3$

$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{33}^2 = 3$

possible cases

संभावित स्थितियाँ

$$\left. \begin{array}{l} 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1 \rightarrow 1 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1 \rightarrow 1 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, -1 \rightarrow 3 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, -1 \rightarrow 3 \end{array} \right\} {}^9C_6 \times 8 = 84 \times 8 = 672$$

9. Mean and standard deviations of 10 observations are 20 and 2 respectively. If  $p$  ( $p \neq 0$ ) is multiplied to each observation and then  $q$  ( $q \neq 0$ ) is subtracted then new mean and standard deviation becomes half of original value. Then find  $q$

10 परीक्षणों का समान्तर माध्य एवं मानक विचलन क्रमशः 20 एवं 2 है। यदि प्रत्येक परीक्षण को  $p$  ( $p \neq 0$ ) से गुणा करके इनमें से  $q$  ( $q \neq 0$ ) घटाया जाए तब नया समान्तर माध्य एवं मानक विचलन वास्तविक मानों के आधे हो जाते हैं, तब  $q$  का मान है।

(1) -10

(2) -20

(3) -5

(4) 10

Ans. (2)

**Sol.** If each observation is multiplied with  $p$  & then  $q$  is subtracted  
यदि प्रत्येक परीक्षण को  $p$  से गुणा करके इनमें से  $q$  घटाया जाए

$$\text{New mean } \bar{x}_1 = p\bar{x} - q$$

$$\text{नया माध्य } \bar{x}_1 = p\bar{x} - q$$

$$\Rightarrow 10 = p(20) - q \quad \dots(1)$$

and new standard deviations

तथा नया मानक विचलन

$$\sigma_2 = |p| \sigma_1 \quad \Rightarrow 1 = |p| (2) \quad \Rightarrow |p| = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow p = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{If } p = \frac{1}{2}$$

$$\text{यदि } p = \frac{1}{2}$$

then  $q = 0$  (from equation (1))

तब  $q = 0$  (समीकरण (1) से)

$$\text{If } p = -\frac{1}{2}$$

$$\text{यदि } p = -\frac{1}{2}$$

$$q = -20$$

**10.** If maximum value of  ${}^{19}C_p$  is  $a$ ,  ${}^{20}C_q$  is  $b$ ,  ${}^{21}C_r$  is  $c$ , then relation between  $a$ ,  $b$ ,  $c$  is

यदि  ${}^{19}C_p$  का अधिकतम मान  $a$ ,  ${}^{20}C_q$  का अधिकतम मान  $b$  तथा  ${}^{21}C_r$  का अधिकतम मान  $c$  है, तब  $a$ ,  $b$ ,  $c$  में सम्बन्ध है :

$$(1) \frac{a}{11} = \frac{b}{22} = \frac{c}{42} \quad (2) \frac{a}{22} = \frac{b}{11} = \frac{c}{42} \quad (3) \frac{a}{22} = \frac{b}{42} = \frac{c}{11} \quad (4) \frac{a}{21} = \frac{b}{11} = \frac{c}{22}$$

**Ans.** (1)

**Sol.** We know  ${}^nC_r$  is max at middle term

हम जानते हैं कि  ${}^nC_r$  मध्य पद पर अधिकतम होता है।

$$a = {}^{19}C_p = {}^{19}C_{10} = {}^{19}C_9$$

$$b = {}^{20}C_q = {}^{20}C_{10}$$

$$c = {}^{21}C_6 = {}^{21}C_{10} = {}^{21}C_{11}$$

$$\frac{a}{19C_9} = \frac{b}{20C_9} = \frac{c}{21C_9} = \frac{c}{11 \cdot 20 \cdot 19C_9}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{42/11}$$

$$\frac{a}{11} = \frac{b}{22} = \frac{c}{42}$$



11. Let  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{6}$  where A and B are independent events then

माना  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{6}$  जहाँ A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तब

- (1)  $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{6}$       (2)  $P\left(\frac{A}{B'}\right) = \frac{1}{3}$       (3)  $P\left(\frac{A}{B'}\right) = \frac{2}{3}$       (4)  $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{5}{6}$

Ans. (2)

Sol. A & B are independent events so

A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं, इसलिए

$$P\left(\frac{A}{B'}\right) = \frac{1}{3}$$

12. Let  $f(x) = \frac{8^{2x} - 8^{-2x}}{8^{2x} + 8^{-2x}}$  then inverse of  $f(x)$  is

माना  $f(x) = \frac{8^{2x} - 8^{-2x}}{8^{2x} + 8^{-2x}}$  तब  $f(x)$  का प्रतिलोम फलन है :

- (1)  $\frac{1}{4} \log_8 \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$       (2)  $\frac{1}{2} \log_8 \left( \frac{1-x}{1+x} \right)$       (3)  $\frac{1}{4} \log_8 \left( \frac{1-x}{1+x} \right)$       (4)  $\frac{1}{2} \log_8 \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$

Ans. (1)

Sol.  $y = \frac{8^{2x} - 8^{-2x}}{8^{2x} + 8^{-2x}}$

$$\frac{1+y}{1-y} = \frac{8^{2x}}{8^{-2x}}$$

$$8^{4x} = \frac{1+y}{1-y}$$

$$4x = \log_8 \left( \frac{1+y}{1-y} \right)$$

$$x = \frac{1}{4} \log_8 \left( \frac{1+y}{1-y} \right)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4} \log_8 \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

13. Roots of the equation  $x^2 + bx + 45 = 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$  lie on the curve  $|z + 1| = 2\sqrt{10}$ , where  $z$  is a complex number then

समीकरण  $x^2 + bx + 45 = 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$  के मूल वक्र  $|z + 1| = 2\sqrt{10}$  पर स्थित हैं, जहाँ  $z$  सम्मिश्र संख्या है तब

- (1)  $b^2 + b = 12$       (2)  $b^2 - b = 30$       (3)  $b^2 - b = 36$       (4)  $b^2 + b = 30$

Ans. (2)

Sol. Let  $z = \alpha \pm i\beta$  be roots of the equation

माना  $z = \alpha \pm i\beta$  समीकरण के मूल हैं

So  $2\alpha = -b$  and  $\alpha^2 + \beta^2 = 45$ ,  $(\alpha + 1)^2 + \beta^2 = 40$

इसलिए  $2\alpha = -b$  तथा  $\alpha^2 + \beta^2 = 45$ ,  $(\alpha + 1)^2 + \beta^2 = 40$

So  $(\alpha + 1)^2 - \alpha^2 = -5$

इसलिए  $(\alpha + 1)^2 - \alpha^2 = -5$

$\Rightarrow 2\alpha + 1 = -5 \Rightarrow 2\alpha = -6$

so  $b = 6$

इसलिए  $b = 6$

hence  $b^2 - b = 30$  अतः  $b^2 - b = 30$

14. For  $f(x) = \ln \left( \frac{x^2 + \alpha}{7x} \right)$ . Rolle's theorem is applicable on  $[3, 4]$ , the value of  $f''(c)$  is equal to

माना  $f(x) = \ln \left( \frac{x^2 + \alpha}{7x} \right)$ . के लिए अन्तराल  $[3, 4]$ , में रोल प्रमेय सत्यापित है तब  $f''(c)$  का मान है :

(1)  $\frac{1}{12}$

(2)  $\frac{-1}{12}$

(3)  $\frac{1}{6}$

(4)  $\frac{-1}{6}$

Sol.  $f(3) = f(4) \Rightarrow \alpha = 12$

$$f(x) = \frac{x^2 - 12}{x(x^2 + 12)}$$

$\therefore f'(c) = 0$

$\therefore c = \sqrt{12}$

$\therefore f''(c) = \frac{1}{12}$

15. Let  $f(x) = x \cos^{-1}(\sin(-|x|))$ ,  $x \in \left( \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$  then

(1)  $f'(0) = -\frac{\pi}{2}$

(2)  $f'(x)$  is not defined at  $x = 0$

(3)  $f'(x)$  is increasing in  $\left( \frac{-\pi}{2}, 0 \right)$  and  $f'(x)$  is decreasing in  $\left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$

(4)  $f'(x)$  is decreasing in  $\left( \frac{-\pi}{2}, 0 \right)$  and  $f'(x)$  is increasing in  $\left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$

माना  $f(x) = x \cos^{-1}(\sin(-|x|))$ ,  $x \in \left( \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$  तब

(1)  $f'(0) = -\frac{\pi}{2}$

(2)  $x = 0$  पर  $f'(x)$  अपरिभाषित है।

(3)  $\left( \frac{-\pi}{2}, 0 \right)$  में  $f'(x)$  वर्धमान है एवं  $\left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$  में  $f'(x)$  हासमान है।

(4)  $\left( \frac{-\pi}{2}, 0 \right)$  में  $f'(x)$  हासमान है एवं  $\left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$  में  $f'(x)$  वर्धमान है।

**Sol.**  $f'(x) = x (\pi - \cos^{-1}(\sin|x|))$   
 $= x \left( \pi - \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(\sin|x|) \right) \right)$   
 $= x \left( \frac{\pi}{2} + |x| \right)$

$$f(x) = \begin{cases} x \left( \frac{\pi}{2} + x \right) & x \geq 0 \\ x \left( \frac{\pi}{2} - x \right) & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2x & x \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} - 2x & x < 0 \end{cases}$$

$f'(x)$  is increasing in  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  and decreasing in  $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$

$\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$  में  $f'(x)$  हासमान है एवं  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  में  $f'(x)$  वर्धमान है।

- 16.** Let P be a point on  $x^2 = 4y$ . The segment joining A (0,-1) and P is divided by point Q in the ration 1:2, then locus of point Q is  
 माना  $x^2 = 4y$  पर एक बिन्दु P है। बिन्दु A (0,-1) एवं P को मिलाने वाला रेखाखण्ड बिन्दु Q द्वारा 1:2 में विभाजित होता है, तब Q का बिन्दु पथ है:

- (1)  $9x^2 = 3y + 2$       (2)  $9x^2 = 12y + 8$       (3)  $9y^2 = 12x + 8$       (4)  $9y^2 = 3x + 2$

**Ans. (2)**

**Sol.** Let point P be  $(2t, t^2)$  and Q be  $(h, k)$ .  
 माना बिन्दु P  $(2t, t^2)$  तथा Q  $(h, k)$  है।

$$h = \frac{2t}{3}, k = \frac{-2 + t^2}{3}$$

Hence locus is  $3k + 2 = \left(\frac{3h}{2}\right)^2 \Rightarrow 9x^2 = 12y + 8$

अतः बिन्दु पथ  $3k + 2 = \left(\frac{3h}{2}\right)^2 \Rightarrow 9x^2 = 12y + 8$

- 17.** Ellipse  $2x^2 + y^2 = 1$  and  $y = mx$  meet a point A in first quadrant. Normal to the ellipse at P meets x-axis at  $\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, 0\right)$  and y-axis at  $(0, \beta)$ , then  $|\beta|$  is

- (1)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$       (2)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$       (3)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       (4)  $\frac{2}{3}$

दीर्घवृत्त  $2x^2 + y^2 = 1$  और रेखा  $y = mx$  बिन्दु A पर प्रथम चतुर्थांश में मिलती है। दीर्घवृत्त के बिन्दु P पर अभिलम्ब x-अक्ष को  $\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, 0\right)$  पर तथा y-अक्ष को  $(0, \beta)$  पर मिलता है। तब  $|\beta|$  है-

- (1)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$                       (2)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$                       (3)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$                       (4)  $\frac{2}{3}$

**Ans.** (3)

**Sol.** Let P be  $(x_1, y_1)$

Equation of normal at P is  $\frac{x}{2x_1} - \frac{y}{y_1} = -\frac{1}{2}$

It passes through  $\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, 0\right) \Rightarrow \frac{-1}{6\sqrt{2}x_1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

So  $y_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$  (as P lies in 1<sup>st</sup> quadrant)

So  $\beta = \frac{y_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

मानाकि बिन्दु P,  $(x_1, y_1)$  है

P पर अभिलम्ब  $\frac{x}{2x_1} - \frac{y}{y_1} = -\frac{1}{2}$

यह बिन्दु  $\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, 0\right)$  से गुजरता है  $\Rightarrow \frac{-1}{6\sqrt{2}x_1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

इसलिए  $y_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$  (चूँकि P प्रथम चतुर्थांश में स्थित हो)

इसलिए  $\beta = \frac{y_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

18. If  $y^2 = ax$  and  $x^2 = ay$  intersect at A & B. Area bounded by both curves is bisected by line  $x = b$  (given  $a > b > 0$ ). Area of triangle formed by line AB,  $x = b$  and x-axis is  $\frac{1}{2}$ . Then

- (1)  $a^6 - 12a^3 - 4 = 0$                       (2)  $a^6 + 12a^3 - 4 = 0$   
 (3)  $a^6 - 12a^3 + 4 = 0$                       (4)  $a^6 + 12a^3 + 4 = 0$

यदि  $y^2 = ax$  तथा  $x^2 = ay$ , A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। दोनों वक्रों से परिवद्ध क्षेत्रफल को रेखा  $x = b$  द्वारा

समद्विभाजित होता है (जबकि  $a > b > 0$ ) रेखा AB,  $x = b$  और x-अक्ष से बना त्रिभुज  $\frac{1}{2}$  है तब

- (1)  $a^6 - 12a^3 - 4 = 0$                       (2)  $a^6 + 12a^3 - 4 = 0$   
 (3)  $a^6 - 12a^3 + 4 = 0$                       (4)  $a^6 + 12a^3 + 4 = 0$

**Ans.** (3)



Sol.  $\int_0^b \left( \sqrt{ax^2 - \frac{x^2}{a}} \right) dx = \frac{a^2}{6}$

$\Rightarrow \frac{2}{3} \sqrt{a} b^{\frac{3}{2}} - \frac{b^3}{3a} = \frac{a^2}{6}$  .....(i)

also area of  $\Delta OQR$  का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 1$

Put in (i) में रखने पर

$\Rightarrow 4a \sqrt{a} - 2 = a^3$

$\Rightarrow a^6 + 4a^3 + 4 = 16a^3$

$\Rightarrow a^6 - 12a^3 + 4 = 0$

19. Let ABC is a triangle whose vertices are A(1, -1), B(0, 2), C(x', y') and area of  $\Delta ABC$  is 5 and C(x', y') lie on  $3x + y - 4\lambda = 0$ , then

माना त्रिभुज ABC एक त्रिभुज है जिसके शीर्ष A(1, -1), B(0, 2), C(x', y') है तथा त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 5 है तथा C(x', y') रेखा  $3x + y - 4\lambda = 0$  पर स्थित है, तब

(1)  $\lambda = 3$

(2)  $\lambda = -3$

(3)  $\lambda = 4$

(4)  $\lambda = 2$

Ans. (1)

Sol.  $D = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x' & y' & 1 \end{vmatrix}$

$-2(1 - x') + (y' + x') = \pm 10$

$-2 + 2x' + y' + x' = \pm 10$

$3x' + y' = 12$  or या  $3x' + y' = -8$

$\lambda = 3, -2$

20. The system of equation  $3x + 4y + 5z = \mu$

$x + 2y + 3z = 1$

$4x + 4y + 4z = \delta$

is inconsistent, then  $(\delta, \mu)$  can be

(1) (4, 6)

(2) (3, 4)

(3) (4, 3)

(4) (1, 0)

मानाकि समीकरण निकाय  $3x + 4y + 5z = \mu$

$x + 2y + 3z = 1$

$4x + 4y + 4z = \delta$

निकाय असंगत है तब  $(\delta, \mu)$  है

(1) (4, 6)

(2) (3, 4)

(3) (4, 3)

(4) (1, 0)

Ans. (3)

**Sol.** Note  $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$  ( $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 + 3R_2$ )

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Now let  $P_3 \equiv 4x + 4y + 4z - \delta = 0$ . If the system has solutions it will have infinite solution, so  $P_3 \equiv \alpha P_1 + \beta P_2$   
Hence  $3\alpha + \beta = 4$  &  $4\alpha + 2\beta = 4 \Rightarrow \alpha = 2$  &  $\beta = -2$   
So for infinite solution  $2\mu - 2 = \delta \Rightarrow$  for  $2\mu \neq \delta + 2$  system inconsistent

यहाँ  $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$  ( $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 + 3R_2$ )

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

माना  $P_3 \equiv 4x + 4y + 4z - \delta = 0$  यदि समीकरणों का निकाय हल रखता है तो इसके अनन्त हल होंगे।  
इसलिए  $P_3 \equiv \alpha P_1 + \beta P_2$   
अतः  $3\alpha + \beta = 4$  &  $4\alpha + 2\beta = 4 \Rightarrow \alpha = 2$  &  $\beta = -2$   
इसलिए अनन्त हल के लिए  $2\mu - 2 = \delta \Rightarrow 2\mu \neq \delta + 2$  के लिए निकाय असंगत

21. Shortest distance between the lines  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-8}{4} = \frac{z-3}{22}$ ,  $\frac{x+3}{1} = \frac{y+7}{1} = \frac{z-6}{7}$  is
- (1)  $3\sqrt{30}$                       (2)  $2\sqrt{30}$                       (3)  $\sqrt{30}$                       (4)  $4\sqrt{30}$

रेखाओं  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-8}{4} = \frac{z-3}{22}$ ,  $\frac{x+3}{1} = \frac{y+7}{1} = \frac{z-6}{7}$  के मध्य की दूरी है-

- (1)  $3\sqrt{30}$                       (2)  $2\sqrt{30}$                       (3)  $\sqrt{30}$                       (4)  $4\sqrt{30}$

**Ans.** (1)

**Sol.**  $\vec{AB} = 6\hat{i} + 15\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{p} = \hat{i} + 4\hat{j} + 22\hat{k}$

$\vec{q} = \hat{i} + \hat{j} + 7\hat{k}$

$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & 22 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 6\hat{i} + 15\hat{j} - 3\hat{k}$

S.D. =  $\frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{p} \times \vec{q})|}{|\vec{p} \times \vec{q}|} = \frac{|36 + 225 + 9|}{\sqrt{36 + 225 + 9}} = 3\sqrt{30}$

22. If volume of parallelopiped whose three coterminous edges are  $\vec{u} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\hat{k}$ ,  $\vec{v} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  &  $\vec{w} = \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$  is 1 cubic unit then cosine of angle between  $\vec{u}$  and  $\vec{v}$  is

यदि समान्तर षटफलक जिसके आसन्न भुजाएँ  $\vec{u} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\hat{k}$ ,  $\vec{v} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  व  $\vec{w} = \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$  है, का आयतन 1 घन इकाई है तब  $\vec{u}$  और  $\vec{v}$  मध्य कोण का कोज्या मान है-

- (1)  $\frac{7}{3\sqrt{10}}$                       (2)  $\frac{7}{6\sqrt{3}}$                       (3)  $\frac{5}{3\sqrt{3}}$                       (4)  $\frac{5}{7}$

Sol.  $\pm 1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow -\lambda + 3 = \pm 1 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ or } \lambda = 4$

For  $\lambda = 4$  के लिए

$$\cos\theta = \frac{2+1+4}{\sqrt{6}\sqrt{18}} = \frac{7}{6\sqrt{3}}$$

### SECTION – 2

- ❖ This section contains **FIVE (03)** questions. The answer to each question is **NUMERICAL VALUE** with two digit integer and decimal upto one digit.
- ❖ If the numerical value has more than two decimal places **truncate/round-off** the value upto **TWO** decimal places.
  - Full Marks : **+4** If **ONLY** the correct option is chosen.
  - Zero Marks : **0** In all other cases

#### खंड 2

- ❖ इस खंड में **पाँच (03)** प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान (**NUMERICAL VALUE**) हैं, जो द्वि-अंकीय पूर्णांक तथा दशमलव एकल-अंकन में है।
- ❖ यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो संख्यात्मक मान को दशमलव के दो स्थानों तक **ट्रंकेट/राउंड ऑफ (truncate/round-off)** करें।
- ❖ अंकन योजना :
  - पूर्ण अंक : **+4** यदि सिर्फ सही विकल्प ही चुना गया है।
  - शून्य अंक : **0** अन्य सभी परिस्थितियों में।

23. Find the sum  $\sum_{k=1}^{20} (1 + 2 + 3 + \dots + k)$

Ans. 1540

Sol. 
$$= \sum_{k=1}^{20} \frac{k(k+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{20} (k^2 + k)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{20(21)(41)}{6} + \frac{20(21)}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{420 \times 41}{6} + \frac{20 \times 21}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} [2870 + 210]$$

$$= 1540$$

24. If normal at P on the curve  $y^2 - 3x^2 + y + 10 = 0$  passes through the point  $(0, 3/2)$  then slope of tangent at P is n. The value of  $|n|$  is equal to

**Ans.** 4

**Sol.**  $P = (x_1, y_1)$

$$2yy' - 6x + y' = 0 \Rightarrow y' = \left( \frac{6x_1}{1+2y_1} \right)$$

$$\left( \frac{\frac{3}{2} - y_1}{-x_1} \right) = - \left( \frac{1+2y_1}{6x_1} \right)$$

$$9 - 6y_1 = 1 + 2y_1 \Rightarrow y_1 = 1$$

$$\therefore x_1 = \pm 2$$

$$\therefore \text{Slope of tangent} = \left( \frac{\pm 12}{3} \right)$$

$$= \pm 4$$

$$\therefore |n| = 4$$

25. If  $2x^2 + (a - 10)x + \frac{33}{2} = 2a$ ,  $a \in \mathbb{Z}^+$  has real roots, then minimum value of 'a' is equal to

यदि  $2x^2 + (a - 10)x + \frac{33}{2} = 2a$ ,  $a \in \mathbb{Z}^+$  के मूल वास्तविक है तब 'a' का न्यूनतम मान है :

**Ans.** 8

**Sol.**  $D \geq 0$

$$(a - 10)^2 - 4(2) \left( \frac{33}{2} - 2a \right) \geq 0$$

$$(a - 10)^2 - 4(33 - 4a) \geq 0$$

$$a^2 - 4a - 32 \geq 0 \Rightarrow a \in (-\infty, -4] \cup [8, \infty)$$